

MAURICE ALLAIS
INGÉNIEUR EN CHEF AU CORPS DES MINES

STRUCTURE PÉRIODIQUE
DES MOUVEMENTS DU PENDULE PARACONIQUE
A SUSPENSION ANISOTROPE
ET INFLUENCE LUNISOLAIRE
RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET ANOMALIES

*Extraits des Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences
Séances des 13 Mai, 4, 13, 18, 25 Novembre et 4 Décembre 1957*

MAURICE ALLAIS

STRUCTURE PÉRIODIQUE
DES MOUVEMENTS DU PENDULE PARACONIQUE
A SUSPENSION ANISOTROPE
ET INFLUENCE LUNISOLAIRE
RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET ANOMALIES

Note du 4 Novembre 1957. --- OBSERVATION DES MOUVEMENTS DU PENDULE PARACONIQUE.

Note du 13 Novembre 1957. — ANALYSE HARMONIQUE DES MOUVEMENTS DU PENDULE PARACONIQUE.

*Note du 18 Novembre 1957. — MOUVEMENTS DU PENDULE PARACONIQUE ET ÉCLIPSE TOTALE DE SOLEIL
DU 30 JUIN 1954.*

*Note du 13 Mai 1957. — TEST DE PÉRIODICITÉ — GÉNÉRALISATION DU TEST DE SCHUSTER AU CAS
DE SÉRIES TEMPORELLES AUTOCORRÉLÉES.*

*Note du 4 Décembre 1957. — APPLICATION DU TEST DE SCHUSTER GÉNÉRALISÉ A L'ANALYSE HARMO-
NIQUE DES AZIMUTS DU PENDULE PARACONIQUE.*

Note du 25 Novembre 1957. — THÉORIE DU PENDULE PARACONIQUE ET INFLUENCE LUNISOLAIRE.

Note (*) de M. MAURICE ALLAIS, présentée par M. Albert Caquot.

Les mouvements d'un pendule suspendu par une bille ont des composantes périodiques. Le dispositif utilisé et la technique opératoire sont décrits. Les mouvements observés résultent de quatre effets conjugués : l'effet de Foucault, un effet de rappel de la suspension. L'influence aléatoire des billes et enfin une influence périodique.

1. La présente Note a pour objet de rendre compte du dispositif expérimental que j'ai utilisé dans diverses séries d'expériences réalisées dans mon laboratoire de Saint-Germain-en-Laye de 1953 à 1957, pour observer le mouvement à trois degrés de liberté d'un « pendule paraconique » oscillant avec une amplitude de l'ordre du dixième de radian. J'appelle paraconique un pendule suspendu par l'intermédiaire d'une petite bille.

Le mouvement observé a été caractérisé par des *périodicités remarquables* de l'ordre de 24 et 25 h dont je rendrai compte ultérieurement.

2. Bien que j'ai eu successivement recours à divers types de pendule, je me bornerai à décrire le dispositif utilisé pendant la série d'observations *continues* de 30 jours qui a été effectuée en juin-juillet 1955.

3. Le pendule paraconique utilisé était un pendule dissymétrique constitué par un disque de bronze vertical de 7,500 kg fixé sur une tige en bronze suspendue à un étrier en bronze E reposant sur une bille d'acier de 6,5 mm de diamètre susceptible de rouler en toute direction sur une surface plane horizontale S. Cette surface était supportée elle-même par un support circulaire S' évidé en aluminium, portant un appendice A et d'une épaisseur de 4,5 cm. L'évidement permettait une rotation du pendule en mouvement dans un angle total de 210 degrés. Ce support S' était supporté par trois vis micrométriques V. La tige du pendule et son étrier pesant 4,5 kg, le poids total du pendule était de 12 kg et la longueur du pendule simple équivalent d'environ 83 cm.

Les billes d'acier étaient des billes S. K. F. de haute précision et les surfaces portantes étaient en carbure de tungstène et cobalt.

Les expériences ont eu lieu dans un sous-sol et le centre de gravité du

pendule se déplaçait à environ 1,50 m en dessous de la surface du sol naturel. Le support S'' était boulonné sur une poutre, elle-même serrée contre le plafond par un système de poutrelles.

4. Le pendule était lâché toutes les 20 mn avec une amplitude initiale d'environ 0,11 radian à partir d'une position de repos, en brûlant un fil. Le mouvement du pendule était observé pendant 14 mn environ en visant une aiguille située à son extrémité inférieure.

En général, la pointe décrivait une courbe assimilable à une ellipse aplatie dont on observait le plan du grand axe avec un système de visée placé sur un cercle C , centré sur l'axe du pendule au repos et portant une division en grades et un vernier. Ce système permettait de déterminer la position du plan de l'oscillation avec une précision de l'ordre du dixième de grade.

En outre, un système de deux barres parallèles mobiles B susceptibles d'être déplacées par rapport au cercle de lecture permettait de mesurer les deux axes de l'ellipse et de déterminer l'orientation du trièdre central d'inertie du pendule.

Au bout de 14 mn le pendule était arrêté et il était lâché à nouveau dans le plan du dernier azimut observé. Les séries d'observations étaient donc *enchaînées*, les lâchers successifs étant effectués toutes les 20 mn, de jour et de nuit. Chaque période de 24 h comportait donc 72 séries d'observations enchaînées.

5. Pour éviter toute influence systématique, la bille supportant le pendule a été changée à *chaque expérience*, toutes les 20 mn, et la surface S a été changée au début de chaque semaine d'observations.

Le support S'' était caractérisé par une très *faible* différence de son inertie propre dans deux plans rectangulaires de sorte que sous cette influence la position *moyenne* du plan d'oscillation tendait à se situer parallèlement au plan de moindre inertie du support indiqué par le vecteur \vec{PQ} sur les photographies jointes, dont l'azimut était d'environ 171 grades, en comptant les azimuts à partir du Sud dans le sens direct. Il en résultait encore une certaine *tendance moyenne à la formation d'ellipses* lorsque le pendule était lâché dans un plan différent de \vec{PQ} . Ces influences ont été déterminées de manière précise par des expériences de lâchers dans différents azimuts en éliminant l'influence du temps par un choix aléatoire des azimuts de départ.

6. Cependant, au cours d'une série *continue* d'observations la tendance du plan d'oscillation n'a pas été de se fixer au voisinage de la direction PQ

(comme on aurait pu s'y attendre, compte tenu de l'effet de Foucault), et la variation de son azimut en fonction du temps s'est présentée comme une oscillation d'allure très irrégulière, au moins à première vue, autour de sa direction *moyenne* P'Q'. Les écarts observés ont été considérables. Au cours d'une même période de 24 h les variations d'azimut ont parfois atteint et dépassé 100 grades. L'azimut moyen observé P'Q' a d'ailleurs été de 150 grades en juin-juillet 1955, inférieur de 22 grades à l'azimut de PQ.

Il est notable que la tangente au départ de la courbe *moyenne* des différentes courbes correspondant aux 2160 séries d'observations élémentaires correspond exactement à l'effet de Foucault.

Des phénomènes analogues ont été constatés en septembre-octobre 1955 avec un pendule symétrique constitué par une sphère de plomb.

Des résultats analogues avaient été obtenus en 1953 dans un petit laboratoire situé dans un immeuble en briques, à Paris : 7, cité Fénelon. La masse du pendule oscillait à environ 9 m au-dessus du sol.

(*) Séance du 4 novembre 1957.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 245, p. 1697-1700, séance du 13 novembre 1957.)

Rectification. - - Après la publication de la Note ci-dessus, l'auteur a relevé dans le texte qu'il avait déposé une erreur qui peut être rectifiée comme suit :

Page 4, § 5, 4^e ligne :

Au lieu de :

Le support S" était caractérisé par une très faible différence de son inertie propre dans deux plans rectangulaires. . .

lire :

Le support S" était caractérisé par une très faible différence de son élasticité et de son inertie propres dans deux plans rectangulaires. . .

Note (*) de M. MAURICE ALLAIS, présentée par M. Albert Caquot.

L'analyse harmonique des mouvements du pendule paraconique montre l'existence de composantes périodiques très significatives de l'ordre de 24 h et 24 h 50 mn. Cette structure périodique ne peut être considérée comme due à des perturbations d'ordre aléatoire. Elle ne peut non plus être considérée comme résultant d'une influence indirecte de la température, de la pression ou du magnétisme.

1. Pendant les années 1954-1955, sept séries continues d'observations enchaînées des mouvements du pendule paraconique ont été effectuées, trois de un mois, deux de quinze jours et deux d'une semaine (¹). A titre d'illustration, je joins en annexe I le graphique des azimuts observés du 7 juin 6 h T. U. au 12 juin 14 h T. U.

2. La suite des azimuts du plan d'oscillation du pendule paraconique observés au cours d'une période, forme une série temporelle qu'on peut analyser par différents moyens : représentation graphique, analyse harmonique (filtre de Buys-Ballot, ajustement à un groupe donné d'ondes par la méthode de Darwin ou la méthode des moindres carrés, périodogramme et corrélogramme), représentation par des schémas autorégressifs. Les résultats obtenus peuvent être appréciés en fonction de trois critères : 1° la probabilité d'obtention par hasard d'une amplitude supérieure à une valeur donnée pour une composante harmonique (²); 2° la concordance des phases pour les deux séries de 15 jours en lesquelles on peut décomposer une série de 30 jours; 3° la beauté des ajustements se caractérisant par une faible dispersion des points autour de la sinusoïde d'ajustement. De l'ensemble de ces analyses appliquées à nos diverses séries d'observations est résultée pour moi la conviction absolue que les séries d'observations que j'ai obtenues présentent une structure périodique remarquable. Les procédés d'analyse par périodogramme et corrélogramme mettent notamment en évidence l'existence de composantes périodiques de l'ordre de 12, 24 et 25 h.

3. Pour simplifier, je me bornerai à indiquer ici les résultats obtenus à partir d'une analyse harmonique d'ensemble portant sur 13 ondes de

la théorie des marées appliquée à la série d'observations de 30 jours de juin-juillet 1955 et à titre comparatif à la série des pressions atmosphériques observées au Bourget pendant la même période. Les résultats obtenus par le Service Hydrographique National et par l'Institut Hydrographique de Hambourg sont donnés en annexe II. Les composantes K_1 et M_1 de la série des azimuts sont *très significatives*. Il est à remarquer que le total des pour-cents relatifs à la pression atmosphérique est environ quatre fois plus faible que pour les azimuts, bien que cependant la pression atmosphérique ne soit pas un paramètre purement aléatoire et qu'elle comporte des composantes périodiques lunisolaires bien connues. A titre indicatif, je joins en annexe III le graphique d'ajustement obtenu directement par l'application de la méthode de Buys-Ballot à la série de juin-juillet 1955 pour l'onde de 25 h.

4. L'onde elliptique mineure M_1 de juin-juillet 1955 de diamètre égal à 10,46 g peut se représenter par la relation $A = 0,082 \sin qt$ rad, avec $q \neq 0,16 \cdot 10^{-4}$, t étant compté en secondes. La vitesse de déplacement angulaire maximum du plan d'oscillation du pendule correspondant à *cette seule onde* est donc de $0,57 \cdot 10^{-5}$ rad/s, soit environ le $1/10^6$ de l'effet de Foucault égal à $0,55 \cdot 10^{-4}$ rad/s. On voit donc que *la totalité* des composantes ci-dessus pour la série des azimuts de juin-juillet 1955 est de l'ordre de la moitié de l'effet de Foucault. *Les forces en jeu sont donc de l'ordre de grandeur de la force de Foucault due à l'accélération de Coriolis.*

5. Si les variations observées étaient purement fortuites, il faudrait admettre qu'elles seraient dues pour l'essentiel à l'influence aléatoire des billes. S'il en était ainsi deux séries doublement enchaînées, les observations paires avec les observations paires, les observations impaires avec les observations impaires, devraient se comporter indépendamment l'une de l'autre, puisqu'on change de bille à chaque expérience. Or, cinq séries d'observations continues, quatre de 14 h et une série de 90 h ont montré que les mouvements de plan d'oscillation dans les deux séries étaient semblables. Ces expériences ont permis d'évaluer l'écart-type de l'influence aléatoire des billes pour chaque expérience élémentaire de 14 mn à $\varepsilon = 2,5$ g. Compte tenu de l'influence de rappel du support S'' (¹), il en résulte que l'intervalle de confiance de l'écart pouvant exister entre deux séries d'observations indépendantes est de $\pm 12,5$ grades. L'influence des billes est donc notable, mais ne saurait expliquer les variations d'azimut constatées d'une centaine de grades.

6. Pour examiner si les variations constatées d'azimut peuvent être considérées comme dues à l'amplification d'un phénomène connu, j'ai

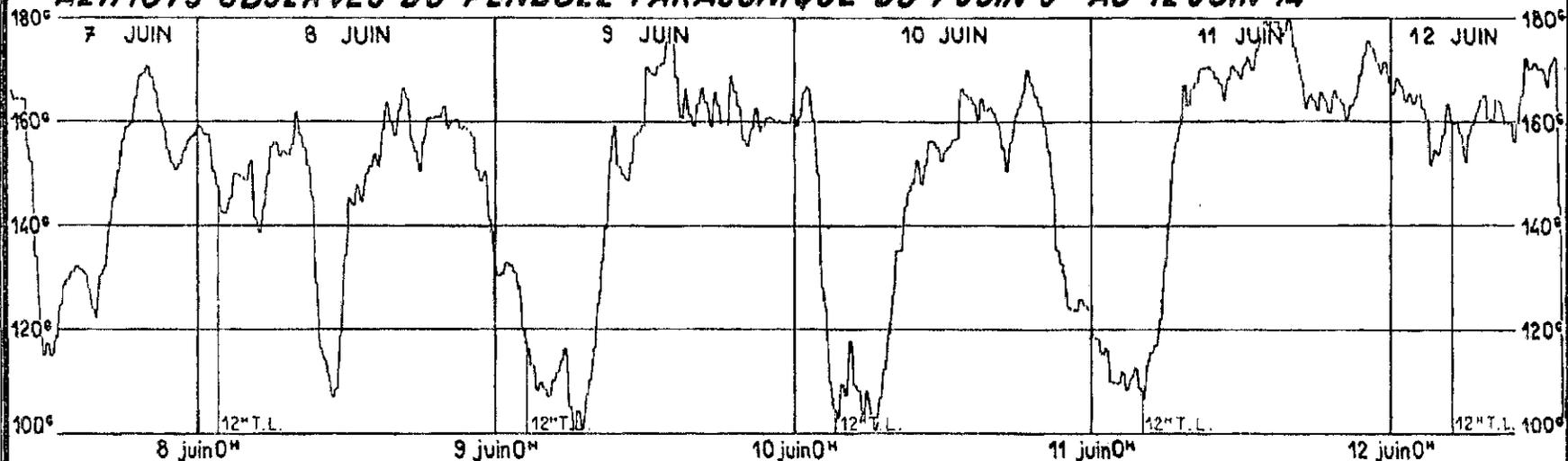
ANNEXE I

SERIE DE JUIN-JUILLET 1955

LEGENDE

12^m T.L.: Heure de passage de la lune au méridien

AZIMUTS OBSERVES DU PENDULE PARACONIQUE DU 7 JUIN 6^m AU 12 JUIN 14^m



ANNEXE II

DIAMETRE DE L'ONDE 2R

SERIES	Variation totale observée D	K ₁	M ₁	O ₁	Q ₁	M ₂	S ₂	M ₃	S ₃	μ ₂	L ₂	N ₂	M ₄	M ₃₄	TOTAL
		23 ^m 93	24 ^m 84	25 ^m 82	26 ^m 87	12 ^m 42	12 ^m	8 ^m 28	8 ^m	12 ^m 87	12 ^m 19	12 ^m 66	6 ^m 21	6 ^m 10	
AZIMUTS VALEURS EN GRADES	83,10	13,00	10,46	4,78	7,78	1,40	3,94	2,54	4,88	3,70	5,30	5,30	1,64	2,32	67,04
PRESSION EN 1/10 DE MILLIBAR	281,00	11,20	4,24	1,20	3,00	4,40	8,80	1,46	1,96	5,20	1,40	3,40	3,80	3,60	53,66
DIAMETRE DE L'ONDE EN % DE LA VARIATION TOTALE OBSERVEE 2R/D															TOTAL DES %
AZIMUTS		15,64	12,59	5,75	9,36	1,69	4,74	3,06	5,87	4,45	6,38	6,38	1,97	2,79	80,67
PRESSION		3,99	1,50	0,43	1,07	1,57	3,13	0,52	0,70	1,85	0,50	1,21	1,35	1,28	19,10

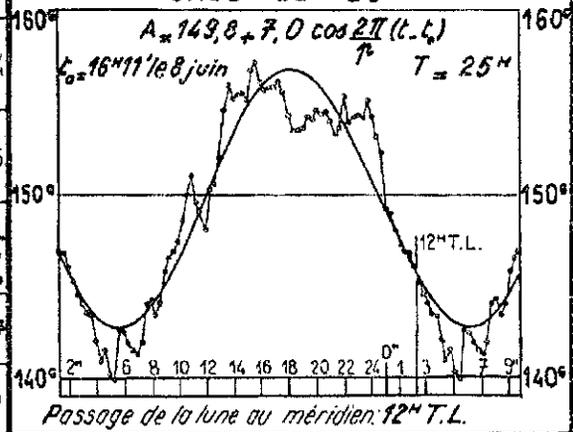
ANNEXE III

ANALYSE HARMONIQUE

PAR LA METHODE DE BUYS-BALLOT

DE LA SERIE DE JUIN-JUILLET 1955

ONDE DE 25^m



procédé à l'analyse harmonique pour les mêmes périodes des variables suivantes : Température au laboratoire et au Bourget, Pression atmosphérique au Laboratoire et au Bourget, Déclinaison magnétique, Nombres K de Bartels et Nombres de Wolf (activité solaire) et j'ai comparé les résultats de cette analyse avec ceux correspondant à l'azimut, tant au point de vue de l'amplitude que des phases. Si l'un des phénomènes correspondant aux paramètres ci-dessus pouvait être considéré comme la cause des mouvements, on observerait : 1° une concordance des phases entre la cause et l'effet; 2° un même rapport des amplitudes pour les deux périodes de 24 et 25 h. Or, cette double circonstance n'est réalisée pour aucune des sept variables ci-dessus. Il faut d'ailleurs souligner que les graphiques représentatifs de ces sept paramètres ne présentent aucune connexion visible avec les graphiques représentatifs de la variation des azimuts du plan d'oscillation du pendule paraconique.

(*) Séance du 18 novembre 1957.

(¹) *Comptes rendus*, 243, 1957, p. 1697.

(²) *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 2469.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 243, p. 1875-1878, séance du 25 novembre 1957.)

MÉCANIQUE. — *Mouvements du pendule paraconique et éclipse totale de Soleil du 30 juin 1954*. Note (*) de M. MAURICE ALLAIS, présentée par M. Albert Caquot.

Le plan d'oscillation du pendule paraconique s'est déplacé d'environ 15 grades au moment de l'éclipse totale de Soleil du 30 juin 1954. Les forces mises en jeu sont de l'ordre de grandeur de celles qui correspondent à l'effet de Foucault. La perturbation constatée paraît devoir être considérée comme résultant de l'effet de l'éclipse.

1. La présente Communication se propose d'exposer les perturbations remarquables constatées dans le mouvement du pendule paraconique de notre laboratoire de Saint-Germain-en-Laye au moment de l'éclipse totale de Soleil du 30 juin 1954.

Ces perturbations ont eu lieu lors de la série d'observations enchaînées de 32 jours de juin-juillet 1954 (1).

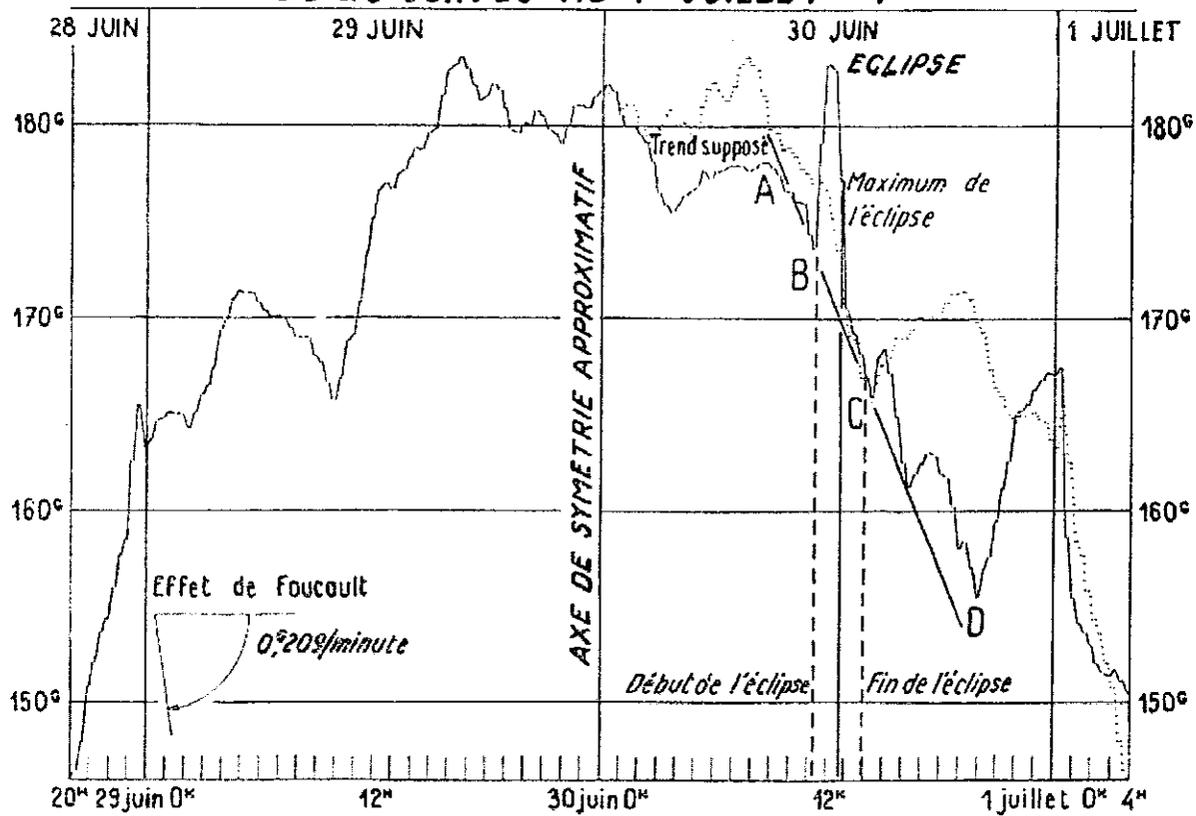
2. Le dispositif expérimental général ayant déjà été décrit, j'indiquerai simplement que le pendule dont on observait le mouvement était un pendule paraconique (c'est-à-dire suspendu par une bille) dissymétrique constitué par un disque de bronze vertical de 7,520 kg, et de deux disques horizontaux d'un poids total de 7,700 kg.

Le poids total du pendule était de 19,8 kg. La longueur du pendule simple équivalent était de 78,29 cm et la période d'oscillation de 1,775 s. L'amortissement était d'environ 11,5 % en 14 mn. Le pendule était lâché toutes les 20 mn avec une amplitude initiale d'environ 0,11 rad et observé pendant 14 mn environ.

3. Les graphiques ci-après donnent en fonction du temps porté en abscisse le déplacement angulaire du plan d'oscillation porté en ordonnée. Chaque point représente l'azimut de départ correspondant à chaque série d'observations de 14 mn, égal à l'azimut du plan d'oscillation au bout de 14 mn dans l'expérience précédente.

Le graphique A représente la courbe des azimuts observés du 28 juin 1954, 20 h, au 1^{er} juillet 1954, 4 h, ainsi que la courbe symétrique de la partie gauche de la courbe représentative des azimuts par rapport à la droite

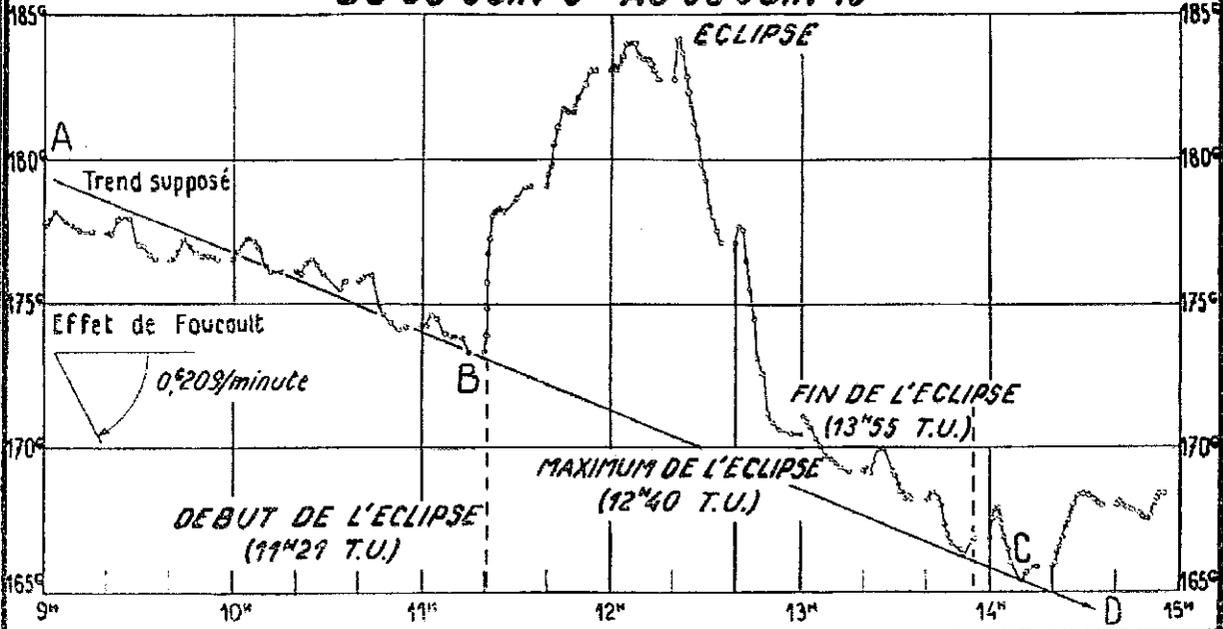
ANNEXE A *ECLIPSE TOTALE DE SOLEIL DU 30 JUIN 1954*
AZIMUTS OBSERVES DU PENDULE PARACONIQUE
DU 28 JUIN 20^h AU 1^{er} JUILLET 4^h



LEGENDE

- Azimuts observés de 20 minutes en 20 minutes
- Courbe symétrique de la courbe en trait plein de gauche par rapport au 30 juin 0^h

ANNEXE B *ECLIPSE TOTALE DE SOLEIL DU 30 JUIN 1954*
AZIMUTS OBSERVES DU PENDULE PARACONIQUE
DU 30 JUIN 9^h AU 30 JUIN 15^h



verticale correspondant au 30 juin, 0 h. Le graphique B représente la courbe détaillée des azimuts observés du 30 juin, 9 h au 30 juin, 15 h (temps universel).

4. L'éclipse a commencé à 11 h 21 mn et s'est terminée à 13 h 55 mn. Au moment *précis* du début de l'éclipse l'azimut du plan d'oscillation s'est brutalement relevé de 5 grades à partir du trend qui caractérisait auparavant son mouvement. 20 mn avant le maximum de l'éclipse qui a eu lieu à 12 h 40 mn, cette déviation a atteint un maximum de 15 grades, puis a diminué progressivement, mais plus brutalement qu'à la montée, la déviation n'étant plus que de 1 grade 20' avant la fin de l'éclipse.

On peut remarquer qu'autant qu'on puisse en juger le déplacement du plan d'oscillation a repris après l'éclipse un mouvement CD analogue au mouvement AB qu'on avait constaté avant le début de l'éclipse (graphique B).

Le graphique A met en évidence une symétrie approchée de la courbe des azimuts par rapport à la droite verticale correspondant au 30 juin 0 h. Cette symétrie qu'on peut attribuer à la structure périodique du mouvement ⁽¹⁾ se constate pendant environ 28 h. A supposer, comme il est vraisemblable, que cette symétrie corresponde à une réalité physique indépendante des perturbations entraînées par le contact de la bille et de la surface, il est notable que rien dans la partie de la courbe des azimuts antérieure à l'époque du centre de symétrie ne correspond à la déviation très forte observée pendant l'éclipse.

Je dois encore souligner que durant les sept périodes d'observations continues auxquelles il a été procédé ⁽¹⁾, je n'ai jamais observé de variation de la courbe des azimuts analogue à la partie BC correspondant à l'éclipse de soleil du 30 juin 1954 (*voir* par exemple sur le graphique B les courbes élémentaires de B à C, d'une part et de A à B et de C à D, d'autre part) ⁽²⁾.

5. On peut enfin remarquer que les variations rapides d'azimut observées de 11 h 20 mn à 12 h et de 12 h 20 mn à 13 h correspondent à des vitesses angulaires de l'ordre de $0,62 \cdot 10^{-4}$ et $0,79 \cdot 10^{-4}$ rad/s, soit respectivement 1,13 et 1,43 fois l'effet de Foucault (soit $0,55 \cdot 10^{-4}$ rad/s à la latitude de notre laboratoire de Saint-Germain). Les forces mises en jeu dans les perturbations constatées sont donc de l'ordre de grandeur de celles qui interviennent dans l'effet de Foucault.

6. Compte tenu des indications qui précèdent ainsi que des régularités constatées par ailleurs dans le mouvement du pendule paraconique ⁽¹⁾, la conclusion me paraît s'imposer que la perturbation constatée est effectivement due à l'effet de l'éclipse.

(*) Séance du 18 novembre 1957.

(1) *Comptes rendus*, 243, 1957, p. 1697 et 1875.

(2) Il est remarquable que le maximum de la déviation apparente due à l'éclipse a eu lieu 20 mn avant le maximum de l'éclipse. Il y a donc une certaine dissymétrie dans l'effet constaté. Une dissymétrie analogue a été observée, mais de sens inverse, le maximum de l'effet étant postérieur au maximum de l'éclipse, pour le magnétisme terrestre (LION, *Comptes rendus*, 33, 1851, p. 202; 34, 1852, p. 207; LION et MULLER, *Comptes rendus*, 74, 1874, p. 199) et pour le champ électrique terrestre (NORDMANN, *Comptes rendus*, 142, 1906, p. 40; CHEVRIER, *Comptes rendus*, 197, 1933, p. 1143; ROUGH, *Comptes rendus*, 239, 1954, p. 465).

STATISTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Test de périodicité. Généralisation du test de Schuster au cas de séries temporelles autocorrélées.* Note de M. MAURICE ALLAIS, présentée par M. Joseph Kampé de Fériet.

1. Dans de nombreux phénomènes, la nature fournit une suite de N observations x_1, x_2, \dots, x_N régulièrement espacées de variance s^2 . Si l'on procède à l'analyse harmonique de cette série, soit par la méthode du filtre de Buys Ballot, soit par la représentation de la suite des x par la somme d'une constante et de n harmoniques de fréquences $\omega = \nu 2\pi/N$ ($N = 2n + 1$, $1 \leq \nu \leq n$), on est amené à éprouver la signification d'une valeur donnée de I_ω avec

$$I_\omega = A_\omega^2 + B_\omega^2 = R_\omega^2, \quad A_\omega = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N-1} x_{s+1} \cos s\omega, \quad B_\omega = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N-1} x_{s+1} \sin s\omega.$$

2. Dans le cas où l'observation montre que les x_i ne sont pas autocorrélés, c'est-à-dire que les coefficients d'autocorrélation empiriques ne sont pas significativement différents de zéro, Schuster a donné un test devenu classique. Suivant ce test on a

$$(1) \quad P = \text{Prob} \{ \mu_\omega > \mu \} = e^{-\mu}$$

avec

$$\mu_\omega = \frac{NR_\omega^2}{4\sigma^2} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)s^2.$$

3. Toutefois, le test de Schuster suppose essentiellement que le processus stochastique $\{\xi_t\} = (\dots, \xi_{t-1}, \xi_t, \xi_{t+1}, \dots)$ dont la suite observée des x est une réalisation particulière est un processus purement aléatoire ⁽¹⁾ dont le corrélogramme se réduit à

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = \rho_2 = \dots = 0.$$

S'il n'en est pas ainsi le test n'est plus applicable et il n'existe actuellement dans la littérature, à notre connaissance tout au moins, aucune extension du test de Schuster au cas de séries autocorrélées. En fait, cependant, le test de Schuster peut être facilement généralisé suivant les principes généraux ci-dessous.

4. Tout processus stationnaire discret $\{\xi_t\}$ peut être décomposé en un processus complètement déterministe η_t et un processus complètement non déterministe ζ_t ,

$$(2) \quad \xi_t = \eta_t + \zeta_t \quad \text{avec} \quad \zeta_t = \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + a_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

η_t peut être pratiquement ⁽²⁾ considéré comme une fonction périodique ou presque périodique dont les harmoniques composantes ont des périodes incommensurables. Les a_i sont des constantes, $\sum a_i^2$ est fini et ε_t est une variable aléatoire non autocorrélée ⁽¹⁾.

5. On peut alors éprouver la signification d'une valeur donnée L_ω dans le cadre des hypothèses suivantes : *a.* le processus naturel inconnu $\{\xi_t\}$ dont la suite des x est une réalisation particulière est stationnaire ; *b.* il ne comporte aucune structure périodique et l'influence de toute perturbation aléatoire s'évanouit progressivement sans aucune oscillation avec le temps.

Ces hypothèses impliquent pratiquement : *a.* que le processus $\{\xi_t\}$ se réduise au processus $\{\zeta_t\}$, *b.* que la suite des a_ν , et par suite la suite des ρ_ν , soit constamment décroissante, a_ν et ρ_ν tendant vers zéro par valeurs positives lorsque ν augmente indéfiniment ⁽³⁾. Soit alors h la valeur de ν à partir de laquelle ρ_ν n'est plus significativement différent de zéro ⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾. Le processus peut alors être considéré comme un processus de moyenne mobile d'ordre h ,

$$\xi_t = \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + a_h \varepsilon_{t-h}$$

On a alors

$$(3) \quad \rho_\nu = \frac{a_\nu + a_1 a_{\nu-1} + \dots + a_{\nu-h} a_h}{1 + a_1^2 + \dots + a_h^2}, \quad 0 \leq \nu \leq h \quad \text{et} \quad \rho_\nu = 0, \quad \nu > h.$$

On peut en première approximation faire l'hypothèse que la variable aléatoire ε est normale. Par ailleurs, on sait ⁽⁶⁾ qu'à des termes en $1/N$ près la probabilité P d'une valeur de L_ω supérieure à une valeur donnée I est donné par la relation (1) avec

$$(4) \quad \rho_\omega = \frac{L_\omega}{E[L_\omega]},$$

où $E[L_\omega]$ représente l'espérance mathématique de L_ω pour un processus de moyenne mobile d'ordre h . Or, on a ⁽⁷⁾

$$E[L_\omega] = \frac{4\sigma^2}{N} \left[1 + 2 \sum_{\nu=1}^h \left(1 - \frac{\nu}{N}\right) \rho_\nu \cos \nu \omega \right].$$

On peut alors prendre comme estimateur consistant de $E[L_\omega]$ la valeur $E^*[L_\omega] = 4\sigma^2 k_\omega / N$ avec

$$(5) \quad k_\omega = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^h \left(1 - \frac{\nu}{N}\right) \rho_\nu \cos \nu \omega$$

sans qu'il soit nécessaire d'estimer les coefficients a_i et de calculer les φ_i à partir des relations (3). La probabilité P cherchée sera alors donnée par la relation (1) avec

$$(6) \quad \mu_m = \frac{N}{\sqrt{1-\sigma^2}} \frac{L_m}{k_m}.$$

Cette méthode revient donc à calculer $E^*[L_m]$ par troncature du corrélogramme à partir du rang h où les r_i ne sont plus significativement différents de zéro. Elle est ainsi assez analogue dans sa conception aux méthodes proposées dans ces dernières années pour estimer le spectre d'un processus stochastique (8).

6. Ces calculs peuvent être facilement complétés pour tenir compte des termes négligés en $1/N$ de la relation (4), du biais résultant du fait que le rang effectif h_1 du processus ζ_t peut être supérieur à h et de la dispersion de $E^*[L_m]$ autour de sa moyenne $E[L_m]$ (9), mais les corrections sont négligeables dès que N a une valeur appréciable, de plus de 500 par exemple, ce qui est toujours le cas en géophysique.

7. Si l'on veut éviter le calcul de k_m on peut, en première approximation, encadrer suivant les cas le corrélogramme dans sa partie significative par les corrélogrammes de deux moyennes mobiles du type

$$\zeta_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \dots + \varepsilon_{t-l},$$

ou par les corrélogrammes de deux séries autorégressives du premier ou du deuxième ordre du type

$$\zeta_t + b_1 \zeta_{t-1} = \varepsilon_t \quad \text{ou} \quad \zeta_t = b_1 \zeta_{t-1} + b_2 \zeta_{t-2} + \varepsilon_t,$$

cas particuliers du processus (2) satisfaisant aux conditions du paragraphe 5. On peut encore choisir ces processus de manière que le corrélogramme théorique s'écarte le moins possible du corrélogramme empirique dans sa partie significative. Dans tous ces cas, les formules théoriques donnant φ_i et k_m sont particulièrement simples et se prêtent à des calculs faciles, et elles fournissent un ordre de grandeur acceptable de k_m pour le calcul de μ_m par la relation (6).

(1) Dans cette Note nous adoptons la terminologie de Wold : H. WOLD et L. JUREN, *Demand Analysis*, New-York, 1953.

(2) C'est-à-dire en considérant qu'il n'y a pas de partie singulière dans le spectre (c'est-à-dire pas de partie continue mais non différentiable).

(3) Dès lors si certains r_i sont négatifs, cette circonstance (qui se présentera effectivement si l'hypothèse de non-périodicité est incorrecte) doit être attribuée dans le cadre des hypothèses faites à la dispersion des r_i autour de leurs moyennes φ_i .

(4) Compte tenu de l'hypothèse de positivité des φ_i .

(⁵) Cette valeur peut être facilement déduite en utilisant l'expression de la variance du coefficient de corrélation de deux séries autorégressives, non corrélées entre elles donnée par G. H. OREUT, *Biometrika*, 35, 1948, p. 377.

(⁶) J. D. SARGAN, *J. R. Stat. Soc.*, 15, 1953, p. 140.

(⁷) M. S. BARTLETT, *Biométrie*, 37, 1950, p. 1.

(⁸) U. GRENANDER et M. ROSENBLATT, *Statistical Analysis, of Stationary Time series*, New-York, 1957.

(⁹) Il est extrêmement important de souligner que la distribution des coefficients empiriques d'autocorrélation r_k est, en première approximation indépendante de la distribution de la variable ε (M. S. BARTLETT, *J. R. Stat. Soc.*, 8, 1946, p. 27).

STATISTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Application du test de Schuster généralisé à l'analyse harmonique des azimuts du pendule paraconique.* Note (*) de M. MAURICE ALLAIS, présentée par M. Joseph Kampé de Fériet.

L'application d'une généralisation du test de Schuster proposée dans une Note précédente (1) aux résultats donnés par l'analyse harmonique des azimuts du pendule paraconique montre que, l'explication par des causes purement fortuites de l'existence dans les données expérimentales d'une onde d'une période voisine de 25 h et d'une amplitude égale à celle constatée, a une très faible probabilité.

1. La présente Note donne les résultats de l'application de ma généralisation du test de Schuster à l'onde de 25 h obtenue par l'analyse harmonique de la série des $N = 2161$ nombres correspondant aux azimuts observés de 20 en 20 mn du pendule paraconique en juin-juillet 1955.

2. Je rappelle tout d'abord qu'on se propose d'éprouver l'hypothèse suivant laquelle : *a.* la série considérée ne comporte aucune structure périodique; *b.* l'influence de toute perturbation aléatoire s'évanouit progressivement sans oscillation avec le temps.

3. S'il en est ainsi, pour une période quelconque $2\pi/\omega$, on a

$$(1) \quad P_\omega = \text{Prob}\{\mu_\omega \geq \mu\} = e^{-\mu},$$

avec

$$(2) \quad \mu_\omega = \frac{I_\omega}{E[I_\omega]} = \frac{NI_\omega}{\sigma^2 k_\omega},$$

$$(3) \quad I_\omega = A_\omega^2 + B_\omega^2 = R_\omega^2, \quad A_\omega = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N-1} x_{s+1} \cos s\omega, \quad B_\omega = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N-1} x_{s+1} \sin s\omega;$$

$$(4) \quad k_\omega^* = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=h} \left(1 - \frac{\nu}{N}\right) r_\nu \cos \nu\omega,$$

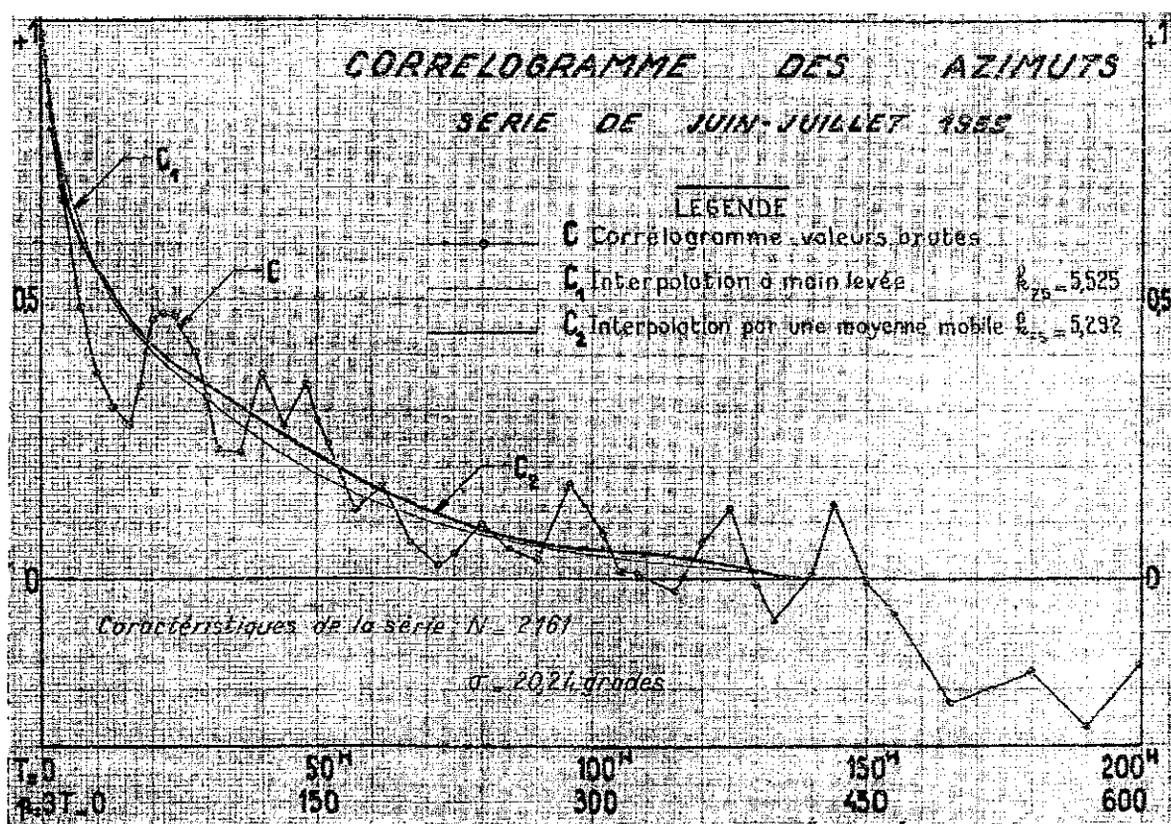
h étant la valeur de ν à partir de laquelle r_ν n'est plus significativement différent de zéro et k_ω^* un estimateur consistant de k_ω .

4. Si pour une période donnée T heures $= 3p$ avec $\omega = 2\pi/p$ la valeur de P est inférieure à $q\%$, la période T peut être considérée comme significative au seuil de $q\%$; on peut dire que P est la probabilité d'arrivée par hasard d'une

onde de période T d'amplitude supérieure ou égale à R_{00} , à partir d'une série ne comportant aucune structure périodique.

Si, dès lors, P est suffisamment faible, la période T peut être considérée comme correspondant à une périodicité réelle.

5. Il est essentiel de souligner que pour toute série satisfaisant aux hypothèses faites, tous les coefficients d'autocorrélation ρ_v sont positifs et décroissent en tendant vers zéro lorsque v augmente indéfiniment. Dès lors, si la suite des valeurs observées r_v des coefficients ρ_v présente des oscillations ou si certains r_v ont des valeurs négatives, cette circonstance (qui se présente effectivement si l'hypothèse de non-périodicité est incorrecte) doit être attribuée dans le cadre des hypothèses faites à la dispersion des r_v autour de leur moyenne $\rho_{v..}$.



6. Le correlogramme C de la suite des nombres considérés, représenté dans la figure, présente une oscillation caractérisée dans sa partie significative, d'une période de l'ordre de 24-25 h. Cependant, dans l'hypothèse d'absence de périodicité, cette oscillation doit être attribuée à une fluctuation aléatoire qu'il y a lieu d'éliminer en interpolant les valeurs obtenues par une courbe moyenne décroissant régulièrement et ne présentant aucune fluctuation. A cet effet j'ai calculé une moyenne mobile du correlogramme sur 51 h, c'est-à-dire sur $q = 153$ valeurs. Pour les valeurs absolues de v inférieures à 76, j'ai pris comme moyenne pour l'abscisse d'indice v la moyenne mobile sur $(2v + 1)$

valeurs, la valeur $r_0 = 1$ n'étant pas prise en considération. La courbe obtenue présente encore une légère fluctuation résiduelle. Pour l'éliminer, j'ai calculé à nouveau et par la même méthode une moyenne mobile, sur 25 h, de cette courbe. La courbe C_2 , ainsi obtenue interpole convenablement le corrélogramme brut C , elle lui est tangente au départ, et elle décroît régulièrement sans fluctuation sensible. Le coefficient de corrélation s'annule pour $h = 408$.

7. Le corrélogramme C_2 étant ainsi déterminé la valeur de k_{75} pour une valeur donnée de ω peut alors être calculée par la relation (4) et pour $T = 25$ h ($p = 75$), $\sigma = 20,24$ (écart-type de la série considérée) et $R_{75} = 7,01$ [valeur calculée par les relations (3)] on trouve

$$k_{75} = 5,292, \quad P_{75} = 0,481 \cdot 10^{-5}.$$

La valeur 7,01 de R doit donc être considérée comme *très significative*.

8. Il est intéressant de noter que, avant de calculer le corrélogramme C_2 , j'avais considéré la courbe C_1 , simple interpolation à main levée du corrélogramme C , d'ailleurs relativement peu différente de C_2 ; on trouvait alors $k_{75} = 5,525$, $P_{75} = 0,81 \cdot 10^{-5}$.

9. Une discussion approfondie, que je compte publier dans un autre périodique, montre que ces conclusions restent inchangées lorsque l'on tient compte des diverses causes d'erreurs signalées dans le paragraphe 6 de ma Note précédente^(*).

10. Je dois signaler enfin que la représentation classique à l'aide d'un processus autorégressif linéaire, qui se prête à un calcul de k_{75} relativement rapide, mais qui ne tient compte que des tout premiers coefficients de corrélation, ne vaut que dans les cas *tout à fait exceptionnels*, où il donne une bonne représentation du corrélogramme dans toute sa partie significative. *Dans le cas général, dont la présente application est une illustration, seul le calcul complet à partir de la relation (4) (tenant compte ici de 408 coefficients de corrélation) peut donner un résultat correct.*

(*) Séance du 4 décembre 1957.

(1) *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 2469.

Observations au sujet de la Note de M. MAURICE ALLAIS,

par M. JOSEPH KAMPÉ DE FÉRIET.

L'appréciation du degré de confiance à accorder aux périodes mises en évidence, par une méthode quelconque d'analyse harmonique, sur un échan-

tillon d'un processus stationnaire discret, est un problème particulièrement délicat. Dans sa Note du 13 mai 1957, M. Maurice Allais a proposé un test qui généralise le test de Schuster au cas d'un processus discret autocorrélé; comme illustration de ce test, la présente Note utilise le matériel numérique considérable accumulé par M. Maurice Allais à l'occasion de son étude du pendule paraconique; dans ce cas concret, elle met en évidence que la probabilité de l'attribution à un hasard de la présence d'une onde d'une période voisine de 25 h et d'une amplitude supérieure ou égale à celle fournie par l'application du filtre de Buys-Ballot, est très faible. En présentant cette Note je ne préjuge en rien des causes physiques qui pourraient expliquer cette périodicité.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 245, p. 2467-2470, séance du 23 décembre 1957.)

Note (*) de M. MAURICE ALLAIS, présentée par M. Albert Caquot.

Les composantes lunisolaires significatives du mouvement du pendule paraconique ne paraissent pouvoir être expliquées ni par la théorie actuelle de la gravitation, ni attribuées à une influence indirecte transmise par le support ou l'atmosphère.

Les effets observés paraissent donc anormaux et dans l'état actuel de notre information et de la discussion, tout se passe comme s'ils constituaient un phénomène nouveau.

1. Les mouvements observés du pendule paraconique (1) posent en fait trois questions :

1° Les séries numériques obtenues contiennent-elles des termes périodiques lunisolaires significatifs ?

2° La théorie actuelle de la gravitation permet-elle d'expliquer des effets lunisolaires de l'ordre de grandeur de ceux constatés, qu'il s'agisse des composantes périodiques des séries d'observations ou de la perturbation constatée au moment de l'éclipse totale de Soleil du 30 juin 1954 ?

3° L'existence de termes périodiques lunisolaires dans les séries obtenues doit-elle être attribuée à une influence *indirecte* transmise par le support ou par l'atmosphère, ou à un effet *direct* de champ d'origine cosmique ?

2. Comme je l'ai déjà indiqué (2), on doit donner en toute certitude une réponse affirmative à la première question.

3. Pour la deuxième question, il paraît impossible d'expliquer les composantes lunisolaires des variations en azimut du plan d'oscillation du pendule paraconique par le jeu conjugué de la loi de l'inertie et de la loi de l'attraction universelle suivant l'inverse carré de la distance. Il est en effet facile de montrer (3) que la vitesse de rotation du plan d'oscillation du pendule paraconique due aux effets d'attraction lunisolaires est, compte tenu du phénomène des marées terrestres, de l'ordre de $2 \cdot 10^{-13}$ alors que les effets observés sont de l'ordre de 10^{-5} (4).

L'extraordinaire petitesse des effets calculés s'explique aisément, si l'on tient compte que, pour obtenir le gradient effectif \vec{f} de l'attraction lunisolaire en un

point de la surface du sol par rapport à la Terre, il faut prendre la différence des attractions en ce point et au centre de la Terre. \vec{f} est de l'ordre de 10^{-8} . De plus, le plan d'oscillation du pendule ne peut tourner sous l'influence de l'attraction lunisolaire qu'en raison des variations de ce gradient autour du point considéré. Il faut donc considérer la différence $\Delta\vec{f}$ entre la valeur de \vec{f} dans la position moyenne du pendule et sa valeur en un point voisin. $\Delta\vec{f}$ est de l'ordre de 10^{-13} .

Par ailleurs, je ne vois rien dans la théorie actuelle de la gravitation qui paraisse susceptible d'expliquer la perturbation (qui se présente comme un phénomène d'écran) observée lors de l'éclipse de Soleil de 1954.

4. En ce qui concerne enfin la troisième question, on peut envisager *a priori* comme explications indirectes possibles des effets constatés : *a.* les nombreuses imperfections du dispositif de suspension (imperfections des billes et des surfaces portantes et anisotropie mécanique du support notamment); *b.* les mouvements de l'air dans le laboratoire; *c.* le magnétisme terrestre; *d.* les variations de température ou de pression à l'intérieur du laboratoire ou à l'extérieur; *e.* les variations de la verticale; *f.* un mouvement thermique dynamique du sol transmis par le bâtiment. Aucune de ces explication ne me paraît, à mon avis, pouvoir être retenue pour les raisons suivantes.

Causes a et b. — Ces causes ne pourraient entraîner que des effets systématiques ou aléatoires qui ne peuvent faire apparaître dans l'analyse harmonique des périodes de 24 h ou 24 h 50 mn statistiquement significatives. Il faut d'ailleurs souligner que dans la mesure où les composantes périodiques seraient liées à l'existence de trajectoires elliptiques, les imperfections du support, en favorisant la création de telles trajectoires, auraient en fait l'avantage de permettre la mise en évidence des phénomènes constatés.

Causes c et d. — Comme je l'ai déjà indiqué (¹) l'intervention de ces causes aurait pour effet une connexion étroite dans les résultats de l'analyse harmonique que l'on ne constate pas.

Causes e et f. — Elles sont liées aux variations d'inclinaison de la surface portante par rapport au champ de pesanteur. Or, les expériences que j'ai faites (d'une part séries systématiques de lâchers dans un azimut donné avec la surface portante alternativement horizontale et inclinée, et d'autre part séries d'observations continues doublement enchaînées de 84 h, la surface portante étant alternativement horizontale et inclinée) montrent que le mouvement du pendule paraît tout à fait *insensible* à des variations d'horizontalité de l'ordre de $17'$, c'est-à-dire de l'ordre de $1000''$. Or, la déviation de la verticale sous l'influence de l'effet thermique classique de 24 h ne dépasse pas $1''$ et par ailleurs, j'ai constaté que l'horizontalité de la surface portante varie au plus

de 10" au cours d'une journée d'observations continues. Il paraît dès lors impossible de retenir les causes e et f .

Cause f. — Il convient de souligner que, pendant les 14 mn que dure chaque expérience élémentaire, tout phénomène dynamique d'une période d'au moins quelques heures ne me paraît pouvoir agir sur le mouvement du pendule que d'une manière statique.

Causes c, d, e, f. — On ne saurait trop souligner, qu'à ma connaissance tout au moins, aucun phénomène géophysique connu ne présente sur une période d'une lunaison un effet lunaire *moyen* diurne, qui soit à la fois très supérieur à l'effet lunaire semi-diurne et d'un même ordre de grandeur que l'effet solaire diurne. En conséquence, les causes c , d , e et f me paraissent devoir être éliminées.

5. Au total, *et dans l'état actuel de la discussion*, il me paraît difficile d'échapper à la conclusion que *tout se passe comme si* les effets observés résultaient d'un effet direct de champ qui ne saurait être expliqué par aucune théorie connue. En l'état, ces effets me paraissent donc constituer un phénomène nouveau.

(*) Séance du 25 novembre 1957.

(¹) *Comptes rendus*, 243, 1957, p. 1697 1875 et 2001.

(²) *Comptes rendus*, 243, 1957, p. 1875 et 2001.

(³) L'emploi d'une représentation paramétrique nouvelle (j'ai représenté le mouvement du pendule par les paramètres $m = -\sin\theta \sin\psi$, $n = \sin\theta \cos\psi$, $u = \varphi + \psi$, où θ , φ , ψ sont les paramètres d'Euler) associé à la méthode d'intégration approchée des équations des mouvements elliptiques par la méthode de la variation des constantes de Lagrange m'a permis de calculer rapidement et sans difficulté toutes les perturbations intéressantes de première approximation du mouvement du pendule paraconique dans le cas où l'amplitude de l'oscillation reste relativement faible et n'excède pas un sixième de radian. Compte tenu des marées terrestres, le calcul donne pour l'influence de la Lune sur le mouvement du plan d'oscillation du pendule conique auquel se réduit en première approximation le pendule paraconique, deux effets :

a. un effet direct représenté par la relation

$$(1) \quad \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_d = \frac{T}{2\pi} K_l \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \cos 2(\Phi - \Lambda_l);$$

b. un effet indirect représenté par les relations

$$(2) \quad \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_i = \frac{3\pi}{4T} \alpha\beta,$$

$$(3) \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{T}{4\pi} K_l \alpha \sin 2(\Phi - \Lambda_l),$$

avec

Φ azimut du plan d'oscillation compté à partir du Sud dans le sens direct; Λ_l , azimut

g , accélération de la pesanteur; r_t , rayon de la Terre; d_l , distance de la Lune à la Terre; M_t , M_l , masses de la Terre et de la Lune. Une formulation analogue vaut pour l'action du Soleil (pour ce dernier on a $C_s = 0,396 \cdot 10^{-12}$).

L'application de cette formulation montre que dans le cas de notre pendule pour lequel $T = 1,83$, $\alpha < 0,11$, $\beta < 0,006$, $\Delta t = 840$ sec, l'effet direct est près de 130 fois moins élevé que l'effet indirect et que l'on a pour ce dernier

$$|\Phi'_t| < 1,8 \cdot 10^{-13}.$$

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 245, p. 2170-2173, séance du 16 décembre 1957.)